ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 01/06/2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ. 31

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ. 65

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ. 87

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$

Β1. Με $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2\cdot 3x+5\cdot 1=x^2-6x+5$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Β2. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

$$\Leftrightarrow x_1=1 \text{ ή } x_2=5$$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow x_1<1 \text{ ή } x_2>5$

Το πρόσημο της f' δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↘		↗		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,1], [5,+∞) και είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,5]
- Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=1$, το $f(1)=\frac{8}{3}$
- Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=5$, το $f(5)=-8$

Β3. Έστω (ζ) η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

Είναι $f(0)=\frac{1}{3}$ ⟶ Α(0,1/3)

και $f'(0)=5$

Είναι $(\zeta): y=\lambda x+\beta$, η ζητούμενη εξίσωση.

Τότε $\lambda=f'(0)=5$, άρα $(\zeta): y=5x+\beta$

και αφού το σημείο Α(0,1/3) είναι σημείο της (ζ), τότε οι συντεταγμένες του σημείου

επαληθεύουν την εξίσωση της, άρα $\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$ οπότε $(\zeta): y=5x+\frac{1}{3}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Β4. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$, από τον ορισμό

Αφού $f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=1+7+5=12$,

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=12$

ΘΕΜΑ Γ

X "θερμοκρασία το πρωί σε 5 πόλεις της Ελλάδας"

22, 18, 20+κ, 14, 16, $\kappa\in\mathbb{R}$

Γ1. Είναι $s=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+7)}{2(x-1)}$

$=\dfrac{8}{2}$

Άρα $s=4$

Γ2. Είναι $CV=20\%$ ή $\left.\begin{array}{l} CV=\dfrac{2}{10} \\ CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}\end{array}\right\}$ $\dfrac{2}{10}=\dfrac{s}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{10}=\dfrac{4}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow$

$2|\bar{x}|=40\Leftrightarrow$

$|\bar{x}|=20\Leftrightarrow \bar{x}=20$ ή $\bar{x}=-20$

Αν $\bar{x}=-20$, τότε $s^2=\dfrac{(22+20)^2+(18+20)^2+\kappa^2+(14+20)^2+(16+20)^2}{5}>16$,

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Οπότε s>4 απορρίπτεται.

Άρα $\bar{x} = 20$

Γ3. Αφού $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow$

$$\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{40+20+\kappa+30}{5} = 20$$

$$\frac{90+\kappa}{5} = 20 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Άρα οι παρατηρήσεις είναι 22, 18, 30, 14, 16, οπότε διατάσσοντάς τις σε αύξουσα σειρά είναι

14, 16, 18, 22, 30 και αφού ν=5 $\frac{\nu+1}{2} = 3$

Άρα $\delta = t_3 = 18$

Γ4. Έστω y "οι θερμοκρασίες το μεσημέρι"

$$y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i \ , \ i = 1,2,\ldots,5$$

Άρα $y_i = \frac{100}{100}x_i + \frac{10}{100}x_i$

$$y_i = \frac{110}{100}x_i \qquad , \ i = 1,2,\ldots,5$$

$$y_i = 1{,}1x_i \qquad , \ i = 1,2,\ldots,5$$

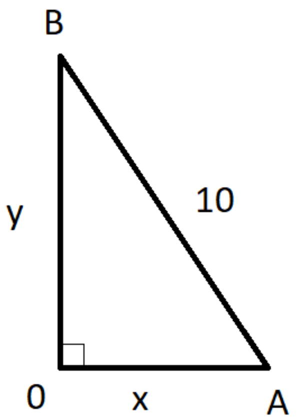
Οπότε από βασική εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ. 99, έχουμε

$$\begin{cases} \bar{y} = 1{,}1\bar{x} \\ sy = 1{,}1sx \end{cases}, \ \text{άρα} \ \ CVy = \frac{Sy}{\bar{y}} = \frac{1{,}1sx}{1{,}1\bar{x}} = \frac{sx}{\bar{x}}$$

Άρα $CVy = CVx = 20\%$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

ΘΕΜΑ Δ



x>0
y>0
AB=10

Δ1. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΒ, έχουμε

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$
$$x^2 + y^2 = 10^2$$
$$y^2 = 100 - x^2$$
$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Αν $100 - x^2 > 0$
$\Leftrightarrow -x^2 > -100$
$\Leftrightarrow x^2 < 100$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{100}$
$\Leftrightarrow |x| < 10$
$\Leftrightarrow 0 < x < 10$

Οπότε $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

Με πεδίο ορισμού A=(0,10)

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x, όταν x=8 είναι ίσος με $f'(8)$

Είναι $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

Με x∈ (0,10), $f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$

οπότε $f'(8) = \dfrac{-8}{\sqrt{100 - 64}} = \dfrac{-8}{\sqrt{36}} = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$

Δ3. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{f(x)-8}{x-6}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}$

$$=\lim_{x\to6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{36-x^2}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{-\left(x^2-36\right)}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{-(x-6)\cdot(x+6)}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{-(x-6)}{\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\frac{-12}{\sqrt{100-36}+8}$$

$$=\frac{-12}{8+8}$$

$$=-\frac{12}{16}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Δ4. $x_1 = 2{,}3$

$x_2 = 3{,}5$

$x_3 = 2{,}8$

Για να συγκρίνω τις τιμές $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)$, χρειάζομαι τη μονοτονία της f

Είναι $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$, $x \in (0,10)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Αδύνατο

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της f', δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0	10
f'	-	
f	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,10) και αφού

$x_1 < x_3 < x_2$

$\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$