ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο Θ.Ε.Τ. Σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο Σελ. 155

Α3. Σχολικό βιβλίο Σελ. 216

Α4. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

g: $[1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h: $[1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Β1.

$f = \dfrac{g}{h}$, $r = g \cdot h$

$D_f = \left\{x \in D_g \cap D_h \text{ και } h(x) \neq 0\right\} = \left\{x \geq 1 \text{ και } \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\right\}$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $D_f = \left\{x \geq 1 \text{ και } x \neq 1\right\} = (1, +\infty)$

Τότε f(x) = $(\frac{g}{h})(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ = $\frac{x+1}{x-1}$ $\Leftrightarrow$ f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$, x > 1

D_r = $\{x \in D_g \cap D_h\} = [1,+\infty)$

Τότε r(x) = (g·h)(x) = g(x)·h(x) =($\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)·($\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$)= $\sqrt{x}^2 - \frac{1}{\sqrt{x}^2} = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

B2.

H f είναι παραγωγίσιμη για x > 1 με $f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$, άρα

f΄(x) < 0 για κάθε x > 1 και f συνεχής στο (1, +∞), άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞).

Συνεπώς η f είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}} = f((1,+\infty)) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f \text{ γν.φθίνουσα}}{=}} (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)) = (1,+\infty)$, αφού

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}[(x+1)\frac{1}{x-1}] = 2(+\infty) = +\infty$, αφού $\lim_{x\to1^+}(x-1) = 0$, x > 1

Θέτω y = f(x) ⟹ y = $\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow x+1 = y\cdot x - y \Leftrightarrow$ yx – x = 1 + y ⇔ x(y – 1) = 1 + y ⇔ x = $\frac{1+y}{y-1}$, άρα

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, x > 1

Επειδή D_f = $D_{f^{-1}}$ = (1, +∞) και f(x) = $f^{-1}(x)$, για κάθε x∈(1, +∞) είναι f^{-1} = f.

B3.

r(x) = $x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

H r είναι συνεχής στο [1, +∞), άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{x}-x)=0=\beta$$

Άρα (ε): y = x.

Β4.

$$(f^{-1}(f(x))^2=1+4r(x),\ x>1 \Leftrightarrow x^2=1+4(x-\frac{1}{x}) \Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0$$

$\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-1$ απορρίπτεται ή $x=1$ απορρίπτεται

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f συνεχής στο $x_0=2 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to2^-}(-2x+4+e^{\lambda})=\lim_{x\to2^+}(-x^2+4x-3+\lambda)$$

$e^{\lambda}=\lambda+1$

Γνωρίζουμε $e^x \geq x+1$, $x\in\mathbb{R}$ με $e^x=x+1 \Leftrightarrow x=0$

Άρα $\lambda=0$.

Γ2. Με $x\in[0,2)\cup(2,+\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη

Με $f'(x)=-2<0$, $0\leq x<2$, και

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$, $x>2$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Η f εμφανίζει για $x_0=0$ ολικό μέγιστο, με τιμή $f(0)=5$.

Γ3. **i)** Η f συνεχής στο [0, 3], από Γ1.

Είναι

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to2^+}[-(x-2)]=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

Αφού $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, άρα δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [0,3].

ii) Είναι f(0)=5,και f(3)=0, άρα Δ(0, 5), Ε(3, 0)

Η κλίση της ευθείας ΓΔ είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{y_E-y_\Delta}{x_E-x_\Delta}=\frac{0-5}{3-0}=-\frac{5}{3}$

Αφού f'(x)=-2, $0\leq x<2$, άρα η f'(x)= $-\frac{5}{3}$ είναι αδύνατη

Με x > 2, f'(x)=-2x+4

Ζητώ $\xi\in(2,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow \xi=\frac{17}{6}$ Δεκτό.

Στο $M(\frac{17}{6}, f(\frac{17}{6}))$, η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία της ΓΔ.

Γ4. **α' τρόπος**

Είναι v(t)=y'(t)=0,5 μον./sec, άρα y(t)=0,5t+c, η συνάρτηση θέσης του κινητού Μ, και αφού ξεκινά από τη θέση Α(2,0), είναι $y(2)=0\Leftrightarrow 0{,}5\cdot 2+c=0\Leftrightarrow c=-1$, οπότε y(t)= 0,5t −1, $t\geq 0$.

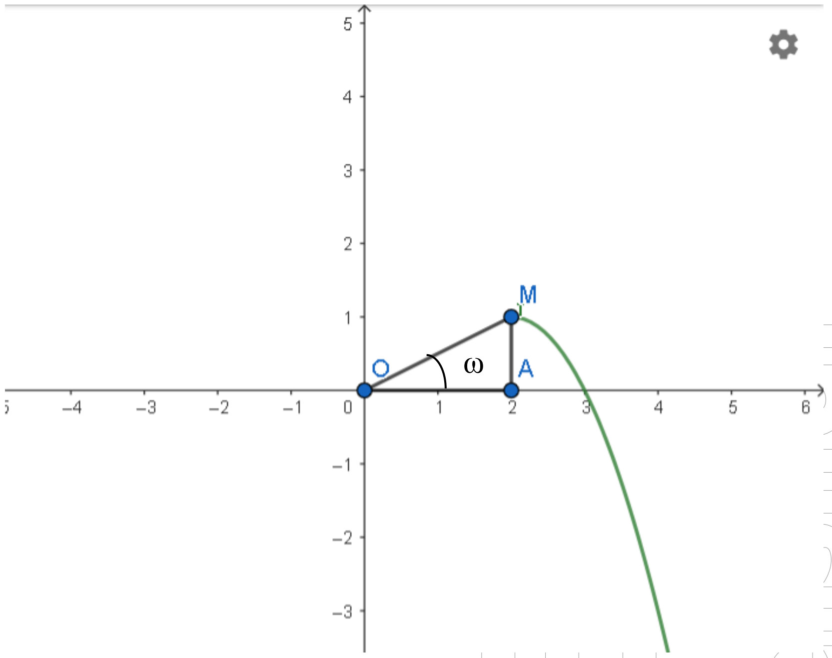
Είναι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{AM}{OA}$,

$\varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{y(t)}{2}$,

άρα $(\varepsilon\varphi\omega(t))'=(\frac{y(t)}{2})'\Longrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\Rightarrow\omega'(t)=\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))\frac{0{,}5}{2}$

Για x=2, f(2)=1, άρα $x(t_0)=2$, $y(t_0)=1$, άρα $\sigma\upsilon\nu(\omega(t_0))=\frac{OA}{OM}=\frac{2}{\sqrt5}$

Οπότε, $\omega'(t_0)=\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t_0))\frac{0{,}5}{2}=(\frac{2}{\sqrt5})^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$



β' τρόπος

Στον τυχαίο χρόνο t εφω(t) = $\dfrac{y(t)}{2}$

Παραγωγίζοντας έχουμε $\dfrac{1}{\text{συν}^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\dfrac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow(1+\text{εφ}^2\omega(t))\cdot\omega'(t)=\dfrac{y'(t)}{2}$

Την t = t₀ : εφω(t₀)= $\dfrac{y(t_0)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$x(t_0) = 2$, $y(t_0) = 1$, $x'(t_0) = 0$

Άρα $(1+\dfrac{1}{4})\omega'(t_0) = \dfrac{0,5\cdot 2}{4}\Leftrightarrow \omega'(t_0)=\dfrac{1}{5}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}, x>0$$

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x}+\alpha)x-(\ln x+\alpha x)}{x^2}=\frac{1+\alpha x-\ln x-\alpha x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$$

	0	e	+∞
f΄	+		-
f	↗		↘
		ΟΜ	

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = e$ ολικό μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}+\alpha$.

Αφού f(0, +∞) = (-∞, 1+$\frac{1}{e}$], έχουμε :

$$f(e)=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1$$

Δ2.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+1, x>0$$

Η f είναι συνεχής στο [$\frac{1}{2}$,1] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=-\ln 4+1<0$$

f(1) = 1 > 0

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 ∈($\frac{1}{2}$,1) $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)$ = 0 και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e) , το x_0 είναι μοναδικό.

Δ3.

i) $f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$

Για $x \in (0, e]$: $f(x) = f(2) \overset{\text{f γν.αύξουσα}}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} x = 2$

Για $x \in [e, +\infty)$: $f(x) = f(4) \overset{\text{f γν.φθίνουσα}}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} x = 4$

Άρα η $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

ii) $2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \ge \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \ge \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(2)$.

Για $x \in (0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

$f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow 2 \le x \le e$

Για $x \in [e, +\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

$f(x) \ge f(2) = f(4) \Leftrightarrow f(x) \ge f(4) \Leftrightarrow e \le x \le 4$

Άρα $x \in [2, 4]$

Δ4.

$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right| dx$

$u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$

$dx = \frac{1}{u}du$

$x = -\ln 2 \Longrightarrow u = \frac{1}{2}$

$x = 0 \Longrightarrow u = 1$

$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f(u)\frac{1-\ln u}{u}\right| \frac{1}{u}du \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

	0		e		$+\infty$
f'	‖	+		-	

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u)\frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)\cdot f'(u)| du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)|\cdot|f'(u)| du \overset{f'(x)>0,\ x\in[\frac{1}{2},1]}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)|\cdot f'(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u)|\cdot f'(u) du + \int_{x_0}^{1} |f(u)|\cdot f'(u) du$$

	1/2		x_0		1
f		-		+	

$$x > x_0 \overset{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$x < x_0 \overset{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u)\cdot f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u)\cdot f'(u) du = -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2(\frac{1}{2})}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{(1-2\ln 2)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Σχόλιο

Το Θέμα Α δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Είναι σαφές και όλες οι απαντήσεις περιέχονται ξεκάθαρα στο σχολικό βιβλίο.

Το Θέμα Β βασίζεται σε άσκηση του σχολικού βιβλίου και αποτελεί μια προέκταση αυτής. Ωστόσο στο Β4. οι μαθητές πρέπει να έχουν εμπεδώσει πολύ καλά τις *έννοιες «Λύση εξίσωσης» και «Πεδίο ορισμού συνάρτησης». (Σχεδόν αυτούσιο θέμα υπάρχει και στο φροντιστηριακό βιβλίο «Μαθηματικά Γ' Λυκείου τεύχος Α'»).*

Το Θέμα Γ είναι ένα πιο απαιτητικό θέμα, στο οποίο οι μαθητές πρέπει να ανακαλέσουν βασικές γνώσεις από τα Μαθηματικά της Β' Λυκείου. Αυτό είναι αρκετό, για να δυσκολέψει τους περισσότερους από αυτούς.

Το Θέμα Δ απαιτεί αλληλένδετη σκέψη για να απαντηθούν τα ερωτήματα και χρήση τεχνικών των πολύ καλά προετοιμασμένων μαθητών. Το Δ4. είναι η κορύφωση της συνδυαστικής σκέψης που απαιτείται για την ορθή επίλυση του θέματος.